Compositions de prédicats sur des quantités graduelles

About compositions of predicates on gradual numbers

D. Rocacher[1] L. Liétard[2]
[1] IRISA/ENSSAT
[2] IRISA/IUT

BP 447, 22305 Lannion Cédex, France, rocacher@enssat.fr
BP 150, 22302 Lannion cédex, France, ludovic.lietard@iut-lannion.fr

Résumé :
L'interrogation flexible a pour objectif de prendre en considération des préférences de l'utilisateur dans des requêtes adressées à des bases de données usuelles. Elle se fonde sur la théorie des ensembles flous. Le traitement conjoint de préférences et de cardinalités dans les requêtes nous a conduits à définir le concept d'entier graduel ($\mathbb{N}_f$). Ce cadre a ensuite été étendu en $\mathbb{Z}_f$ et $\mathbb{Q}_f$, afin de pouvoir traiter des questions comportant des différences et des divisions. Dans ce papier, nous étudions comment définir des relations d'ordre entre ces nombres graduels et comment composer des prédicats utilisant de telles relations.

Mots-clés :
Interrogation flexible, nombres graduels, relation d'ordre, conjonction, disjonction.

Abstract:
Based on fuzzy set theory, flexible querying enables users to express preferences inside requirements. Quantifications and preferences on data have led us to define the notion of fuzzy integers ($\mathbb{N}_f$). This framework has been extended to $\mathbb{Z}_f$ and $\mathbb{Q}_f$, in order to dealing with queries based on difference or division operations. In this paper we study how to define fuzzy order relations between such fuzzy numbers and how to compose predicates using these fuzzy order relations.

Keywords:
Flexible querying, gradual numbers, order relation, conjunction, disjunction.

1 Introduction

Cet article se place dans le cadre de l'interrogation flexible [1] de bases de données usuelles. Nous nous intéressons plus particulièrement à la prise en compte simultanée de préférences et de quantités dans les requêtes dont nous avons montré [10] que le traitement fait apparaître le concept de multi-ensemble flou [7].

Dans [8] nous avons proposé une approche qui caractérise les multi-ensembles flous et permet de traiter de manière uniforme les ensembles, ensembles flous et multi-ensembles. Cette construction s'appuie sur le concept d'entier naturel graduel ($\mathbb{N}_f$) qui correspond à une cardinalité d'un ensemble flou. Par la suite [9][12] nous avons défini un cadre plus général, basé sur l'ensemble des entiers relatifs graduels ($\mathbb{Z}_f$), dans lequel il est possible de définir des différences exactes entre entiers graduels. L'intérêt de cette démarche est d'offrir une base algébrique permettant la composition de calculs. Enfin, $\mathbb{Z}_f$ a été prolongé en $\mathbb{Q}_f$ [13], l'ensemble des nombres rationnels graduels, afin de construire un système d'opérations multiplicatives fermé et de réaliser des divisions exactes. Ces contextes permettent de traiter des requêtes flexibles complexes basées sur des calculs entre quantités graduelles.

La définition des ensembles graduels $\mathbb{N}_f$, $\mathbb{Z}_f$ puis $\mathbb{Q}_f$ et leurs opérations arithmétiques pose naturellement le problème de la comparaison de ces nombres. L'objectif, dans le cadre de l'interrogation flexible, est de comparer des cardinalités d'ensembles flous afin de traiter, notamment, des requêtes comportant des quantificateurs absolus ou relatifs [6]. La démarche que nous avons développée consiste à définir une relation d'ordre graduelle générique [11] basée sur l'interprétation de l'écart entre deux nombres graduels. Une tel comparaison conduit à définir une valeur de vérité généralisée définie par un ensemble flou sur [0, 1]. Une telle valeur décrit *exactement* dans quelle mesure une relation d'ordre est satisfaite. Par la suite, si besoin, celle-ci peut être *résumée* en un degré évalué grâce à une mesure fondée sur une intégrale pondérée. Nous avons montré qu'une telle mesure généralise la notion d'implication floue résiduée. En effet, la relation d'ordre sur des entiers graduels, sous-jacente à une inclusion dans le cadre des multi-ensembles flous, généralise, d'une part, une implication entre degrés et, d'autre part, une relation d'ordre sur les entiers.

Dans cet article nous étudions comment des conditions flexibles telles que : *au moins deux employés jeunes sont bien payés* peuvent être composées. En section 2 et 3, nous rappelons quelques notions sur les nombres graduels et la caractérisation de relations d'ordre sur ces nombres. Puis, en section 4, nous montrons comment construire des opérations de disjonction et de conjonction pour composer des prédicats portant sur des nombres graduels. La section 5 illustre le propos au travers de deux exemples simples et de l'analyse de la cardinalité floue FECount [17].

2 Quantités graduelles

La cardinalité floue $|E|$ d'un ensemble flou E est définie par un ensemble flou d'entiers caractérisé par :

$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \mu_{|E|}(n) = \sup\{\alpha \ /\ |E_\alpha| \geq n\}$

Cette définition est aussi appelée FGCount(E) par Zadeh [17]. Le degré α, associé à un entier n de $|E|$, évalue dans quelle mesure E contient au moins n éléments.

Il est important de noter que nous interprétons une telle quantité comme "un tout" décrivant complètement, et exactement, la cardinalité d'un ensemble flou. Celle-ci est donc traitée comme un ensemble flou *conjonctif* d'entiers. Un tel nombre est parfaitement connu et ne recouvre aucune forme d'incertitude. De ce point de vue, il se différencie de la définition habituelle d'un *nombre flou* qui est interprété comme une valeur mal connue et modélisée par une distribution de possibilité (correspondant a une collection disjonctive de valeurs possibles) [1][4]. Nous appelons *entiers graduels* ces quantités fondées sur des cardinalités floues et notons $\mathbb{N}_f$ l'ensemble des entiers naturels graduels.

L'α-coupe d'un entier graduel x est un ensemble d'entiers formant une suite croissante $\{0, 1, \ldots, x_\alpha\}$ qui peut être représentée par sa plus grande valeur x_α. Par la suite, on appelle coupe de niveau α d'un entier flou x, notée x_α, le plus grand entier de l'α-coupe de l'ensemble flou d'entiers défini par x. L' α-coupe d'un entier graduel x est donc interprétée comme un entier positif.

Sur $\mathbb{N}_f$, les opérations d'addition et de multiplication sont aisément caractérisées en s'appuyant sur le principe d'extension étendue [16]. Cependant, la différence peut ne pas être définie. C'est pourquoi $\mathbb{N}_f$ a été étendu en $\mathbb{Z}_f$, l'ensemble des entiers relatifs graduels. Nous avons montré que ce support permet une généralisation où la différence peut toujours être représentée.

L'ensemble des entiers relatifs graduels $\mathbb{Z}_f$ est défini comme l'ensemble quotient $(\mathbb{N}_f \times \mathbb{N}_f)\ /\ \mathcal{R}$ des classes d'équivalence sur $(\mathbb{N}_f \times \mathbb{N}_f)$ par la relation d'équivalence $\mathcal{R}$ définie par :

$\forall (a, b) \in \mathbb{N}_f \times \mathbb{N}_f,\ (a, b)\ \mathcal{R}\ (a', b')$ ssi $a \oplus b' = a' \oplus b$,

Un entier relatif graduel x s'identifie donc à une classe d'équivalence, notée (x^+, x^-), où x^+ et x^- sont des entiers positifs graduels. Par abus de langage, nous écrirons parfois « l'entier relatif graduel (x^+, x^-) ».

Exemple 2.1. Soit deux entiers graduels positifs : $a = \{1/0, 1/1, 0.8/2, 0.5/3, 0.2/4\}$; $b = \{1/0, 1/1, 0.3/2\}$. Le couple $(a, b) = (\{1/0, 1/1, 0.8/2, 0.5/3, 0.2/4\}, \{1/0, 1/1, 0.3/2\})$ est une instance de la classe d'équivalence définissant un entier relatif graduel ($\mathbb{Z}_f$). ♦

Une entier relatif graduel $x = (x^+, x^-)$ peut donc prendre plusieurs formes équivalentes. Cependant, x peut également se décrire de façon canonique en énumérant les valeurs (x^+_α - x^-_α) pour toutes ses α-coupes différentes. Ces valeurs sont des entiers relatifs ($\mathbb{Z}$). On obtient ainsi une représentation, notée x^c, définie par :

$$x^c = \sum \alpha_i / (x^+_{\alpha_i} - x^-_{\alpha_i})$$

où les α_i correspondent aux différentes α-coupes de x et où les ($x^+_{\alpha_i}$ - $x^-_{\alpha_i}$) appartiennent à $\mathbb{Z}$.

Exemple 2.2. La représentation canonique de (a, b) (cf. exemple 2.1) est obtenue en énumérant les valeurs de ses différentes α-coupes : $(a, b)^c = \{1/0, 0.8/1, 0.5/2, 0.3/1, 0.2/2\}^c$. ♦

Par la suite, un nombre graduel sera décrit de manière canonique en énumérant les valeurs de ses différentes α-coupes.

Si x et y sont deux entiers relatifs graduels, l'addition, $x \oplus y$, et la multiplication, $x \otimes y$, sont définies par les classes respectives : $(x^+ \oplus y^+, x^- \oplus y^-)$ et $((x^+ \otimes y^+) \oplus (x^- \otimes y^-), (x^+ \otimes y^-) \oplus (x^- \otimes y^+))$.

On note que tout entier relatif (x^+, x^-) a un opposé (x^-, x^+). La différence de deux nombres relatifs graduels x et y se définit donc comme la somme de x et de l'opposé de y.

3 Relations d'ordre

Dans cette section, on s'intéresse à la comparaison de deux entiers graduels a et b appartenant à $\mathbb{Z}_f$. Une relation d'ordre graduelle (*i.e.* à valeur dans [0, 1]), notée $a \geq_g b$, exprime que « plus un grand nombre d'α-coupes de niveau élevé satisfont la propriété $a_\alpha - b_\alpha \geq 0$, plus, globalement, $a \geq_g b$ est satisfait ». Cette relation peut être relaxée afin de permettre à certaines α-coupes d'enfreindre, quelque peu, la relation d'ordre. L'objectif est alors d'autoriser, dans une certaine mesure, des écarts légèrement négatifs pour certaines α-coupes, la relation d'ordre tolérante ainsi construite est alors mieux satisfaite que la relation d'ordre graduelle qu'elle relaxe. Cette tolérance sur l'évaluation des écarts $delta_\alpha = a_\alpha - b_\alpha$ peut s'exprimer au moyen d'un prédicat flou, comme exemple l'ensemble flou "au moins 0 avec tolérance" (figure 3.1). Une telle relation d'ordre graduelle et tolérante est notée $\geq_{gT}$.

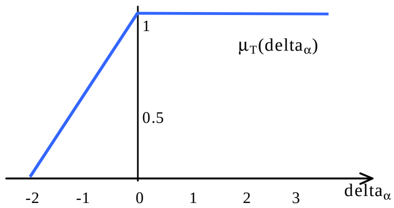

Figure 3.1 *Prédicat au moins 0 avec tolérance*

La satisfaction de la propriété $a \geq_{gT} b$ se définit en établissant un bilan α-coupe par α-coupe de la satisfaction de l'écart $a_\alpha - b_\alpha$ compte-tenu d'une relation de tolérance floue T. Cette satisfaction globale est un ensemble flou S sur [0, 1] tel que $\mu_S(\alpha) = T(a_\alpha - b_\alpha)$. S exprime précisément dans quelle mesure le prédicat $a \geq_{gT} b$ est satisfait. La figure 3.2 est une représentation d'une satisfaction globale S.

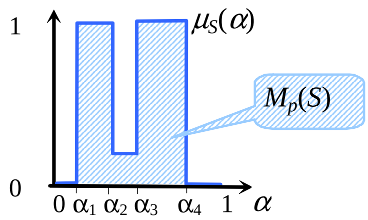

Figure 3.2 *Mesure d'une satisfaction globale*

La question qui se pose est alors de « résumer » une satisfaction globale S par un degré entre 0 et 1, c'est-à-dire d'en trouver une mesure traduisant la sémantique « plus il y a un grand nombre d'α-coupes de niveau élevé satisfaisant de manière élevée $T(a_\alpha - b_\alpha)$, plus, globalement, $a \geq_{gT} b$ est satisfait ». Cette mesure de S est définie au moyen d'une intégrale pondérée :

$$M_p(S) = [\int_0^1 \mu_S\ (\alpha)\ p\alpha^{p-1}\ d\alpha]^{1/p}$$

où $p\alpha^{p-1}$ est une fonction croissante de α permettant de renforcer l'importance des α-coupes élevées. Elle est illustrée sur la figure 3.2 par la surface hachurée. Nous avons montré que $M_p(S)$ généralise la famille des implications floues de Schweizer-Sklar [14], mais une forme encore plus générale aurait pu être adoptée en utilisant une fonction de pondération croissante $\varphi(\alpha)$ [15] quelconque.

La notion d'entier graduel généralise à la fois la notion d'entier et celle de degré, il est alors possible d'interpréter l'implication floue $1 \Rightarrow_f a$ (dont la valeur est a) comme l'évaluation d'une relation d'ordre entre deux nombres graduels (*i.e.* $\{1/1\}^c \leq_g \{1/0,\ a/1\}^c$) dont la satisfaction globale, notée S_a, est un ensemble flou sur [0, 1] tel que : $\mu_{S_a}(\alpha) = 1$ si $\alpha \in\ ]0, a]$; $\mu_{S_a}(\alpha) = 0$ sinon (cf. figure 3.3).

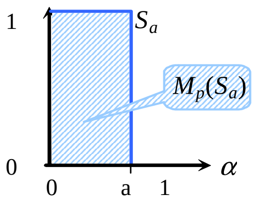

Figure 3.3 *Degré interprété comme une mesure de satisfaction globale*

On vérifie que la mesure M_p de l'ensemble flou S_a est bien égale à a puisque :

$$M_p(S_a) = [\int_0^1 \mu_{S_a}(\alpha)\ p\alpha^{p-1}\ d\alpha]^{1/p} = a\ .$$

La négation d'un degré a peut également se définir à l'aide d'une implication floue par : $a \Rightarrow_f 0$. Ainsi la négation de a s'interprète comme une mesure M_p de la satisfaction globale $\bar{S}_a$ représentée par l'ensemble flou sur [0, 1] tel que : $\mu_{\bar{S}_a}(\alpha) = 0$ si $\alpha \in\ ]0, a]$; $\mu_{\bar{S}_a}(\alpha) = 1$ sinon (cf. figure 3.4).

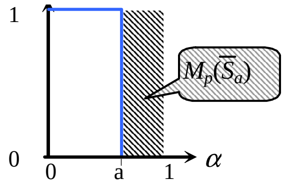

Figure 3.4 *Négation du degré 'a' vue comme une intégrale.*

La mesure M_p de $\bar{S}_a$ s'exprime alors au moyen d'une intégrale par :

$$M_p(\bar{S}_a) = [\int_0^1 \mu_{\bar{S}_a}(\alpha)\ p\alpha^{p-1}\ d\alpha]^{1/p} = [1 - a^p]^{1/p}$$

On retrouve ici une définition usuelle de la négation [5]. Celle-ci peut encore se généraliser en ce plaçant dans le cadre des nombres graduels. La négation de la mesure d'une satisfaction globale S de forme quelconque s'évalue en mesurant la satisfaction globale de $\bar{S}$. La figure 3.5 illustre cette interprétation de la négation à l'aide d'une intégrale.

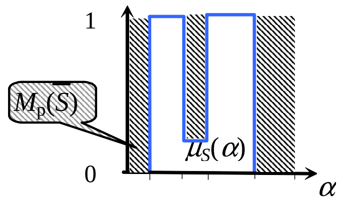

Figure 3.5 *Généralisation de la négation.*

Cette mesure s'écrit :

$$M_p(\bar{S}) = [\int_0^1 (1 - \mu_S(\alpha))\ p\alpha^{p-1}\ d\alpha]^{1/p}.$$

4 Composition de prédicats

4.1 Disjonction

Considérons deux degrés a et b, avec $a \geq b$. Ces degrés peuvent être respectivement représentés par les satisfactions globales S_a et S_b. La t-conorme standard max(a, b) est alors représentée par la satisfaction globale $S_a \cup S_b$ dont la mesure M_p est a. Une telle mesure évalue le nombre d'α-coupes satisfaites dans S_a ou dans S_b.
Les t-conormes strictement monotones distinguent par exemple $\vee(0.8,\ 0.6)$

de $\vee(0.8, 0.2)$ en "favorisant" la première proposition par rapport à la seconde, cette dernière étant elle-même plus grande que max(0.8, 0.2). De même, il est possible de définir des mesures de $S_a \cup S_b$ basées sur une notion d'intégrale et traduisant cette sémantique générale des t-conormes. Pour cela, il suffit de tenir compte positivement des α satisfaits dans S_a ou dans S_b auquel on ajoute un "bonus" en tenant compte des α satisfaits à la fois dans S_a et dans S_b. On note M^*_P ces mesures de $S_a \cup S_b$. La figure 4.1 illustre graphiquement cette interprétation des t-conormes en terme d'intégrales lorsque des degrés a, b ou c sont représentés par des satisfactions globales S_a, S_b et S_c.

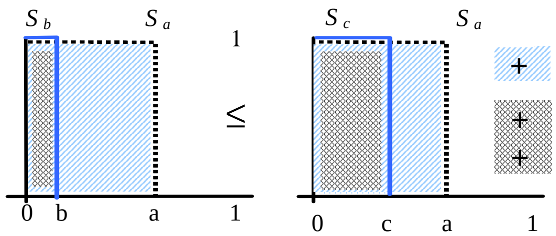

Figure 4.1 *Interprétation de conormes à l'aide d'intégrales*

Ainsi dans le cas particulier de satisfactions globales S_a et S_b représentant des degrés, la mesure M^*_P de la satisfaction $S_a \cup S_b$ s'exprime par :

$$M^*_P(S_a \cup S_b) = \min(1, (a^p + b^p)^{1/p})$$

qui est l'expression générale d'une conorme archimédienne en utilisant un générateur croissant de la forme x^p ($p \geq 0$) [5].

Une généralisation est obtenue en considérant des satisfactions globales quelconques. $M^*_P(S_a \cup S_b)$ se définit alors en tenant compte des α satisfaits dans S_a ou dans S_b et des α satisfaits à la fois dans S_a et dans S_b (figure 4.2).

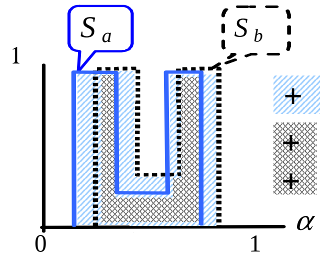

Figure 4.2 *Généralisation d'une t-conorme à l'aide d'une intégrale*

Ce comportement se traduit formellement par :

$$M^*_p(S_a \cup S_b) = \min(1, \left\{ \begin{array}{l} \left[\int_0^1 \mu_{S_a \cup S_b}(\alpha)\ p\alpha^{p-1}\ d\alpha\right] \\ +\left[\int_0^1 \mu_{S_a \cap S_b}(\alpha)\ p\alpha^{p-1}\ d\alpha\right] \end{array} \right\}^{1/p})$$

En définissant la t-conorme $\vee(x, y)$ par min $(1, (x^p + y^p)^{1/p})$, on en déduit :

$$M^*_p(S_a \cup S_b) = M_p(S_a \cap S_b) \vee M_p(S_a \cup S_b).$$

Par ailleurs, en choisissant une intersection standard $\mu_{S_a \cap S_b}(\alpha) = \min(\mu_{S_a}(\alpha), \mu_{S_b}(\alpha))$ et l'union standard $\mu_{S_a \cup S_b}(\alpha) = \max(\mu_{S_a}(\alpha), \mu_{S_b}(\alpha))$ pour combiner deux satisfactions globales S_a et S_b, l'expression se réduit à :

$$M^*_p(S_a \cup S_b) = \min(1, \left\{\int_0^1 (\mu_{S_a}(\alpha) + \mu_{S_b}(\alpha))\ \ p\ \alpha^{p-1}\ \ d\alpha\right\}^{1/p}).$$

Dans ce contexte, on obtient la propriété :

$$M^*_p(S_a \cup S_b) = M_p(S_a) \vee M_p(S_b).$$

On montre de cette manière que si la notion de satisfaction globale peut être interprétée comme une généralisation de la notion de degré, il est également possible de combiner des satisfactions globales au moyen de l'union : $S_a \cup S_b$. Une mesure $M_P(S_a \cup S_b)$ généralise la plus petite conorme (max) et une mesure $M^*_P(S_a \cup S_b)$ généralise une t-conorme.

4.2 Conjonction

Le raisonnement suivi pour interpréter une t-norme à l'aide d'une intégrale et généraliser cette notion par rapport à des satisfactions globales, est analogue à celui développé en section 4.1 et pour des raisons de place nous nous n'en mentionnons ici que le résultat principal.

La généralisation de la mesure M_P^* de $S_a \cap S_b$, lorsque S_a et S_b sont des satisfactions globales quelconques, est schématisée par la figure 4.3. Elle évalue de façon positive les parties communes de S_a et S_b et de façon négative les parties non couvertes par S_a et S_b.

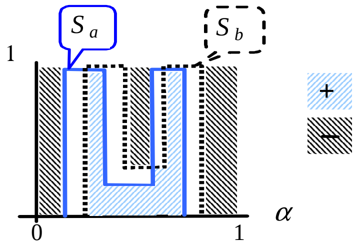

Figure 4.3 *Généralisation d'une t-norme à l'aide d'une intégrale*

L'expression suivante traduit un tel comportement :

$$M_p^*(S_a \cap S_b) = \max(0,$$
$$\left\{ \left[\int_0^1 \mu_{S_a \cap S_b}(\alpha)\ p\ \alpha^{p-1}\ d\alpha \right] - \left[\int_0^1 \mu_{\overline{S_a \cup S_b}}(\alpha)\ p\ \alpha^{p-1}\ d\alpha \right] \right\}^{1/p}).$$

5 Prédicats composés

Les opérations de conjonction et disjonction étudiées précédemment permettent de composer des prédicats portant sur des comparaisons entre quantités floues et délivrant des satisfactions globales. Nous illustrons ceci au travers de trois exemples. Le premier traite de l'égalité de nombres graduels, le second concerne la construction d'une égalité approchée, le troisième propose une analyse de la cardinalité floue FECount [17] dont l'interprétation pose question.

- **Égalité**

On cherche les *entreprises ayant 2 employés jeunes et bien payés*. Cette requête est une sélection sur un critère comparant la cardinalité $|E|$ des employés jeunes et bien payés de chaque entreprise observée à l'entier 2. Soit, pour une entreprise donnée, l'ensemble des personnes *jeunes et bien-payées* défini par : $E = \{1/p_1, 0.2/p_2, 0.4/p_3, 0.1/p_4\}$. Sa cardinalité floue est : $|E| = \{1/0, 1/1, 0.4/2, 0.2/3, 0.1/4\}$.

Considérons le prédicat $P_1 = |E| \geq_g 2$ et le prédicat $P_2 = |E| \leq_g 2$. La méthode suivie pour déterminer dans quelle mesure $|E| = 2$, consiste à évaluer la conjonction $(|E| \leq_g 2) \wedge (|E| \geq_g 2)$, c'est-à-dire à calculer l'intersection des satisfactions globales de chacun des sous-critères $(S_{P_1} \cap S_{P_2})$ puis à appliquer une mesure M_p^* afin d'en extraire un degré.

La différence $\Delta = |E| - 2$ est l'entier relatif flou : $\{1/\text{-}1, 0.4/0, 0.2/1, 0.1/2\}^c$. La satisfaction globale S_{P_1} (caractérisant $\Delta_\alpha \geq 0$, $\forall \alpha$) est l'ensemble flou tel que : $\forall\ \alpha \in\ ]0, 0.4]$, $\mu_{S_{P_1}}(\alpha) = 1$ et $\mu_{S_{P_1}}(\alpha) = 0$ sinon. La satisfaction globale S_{P_2} (caractérisant $\Delta_\alpha \leq 0$, $\forall \alpha$) est l'ensemble flou défini par $\forall\ \alpha \in\ ]0, 0.2]$, $\mu_{S_{P_2}}(\alpha) = 0$ et $\mu_{S_{P_2}}(\alpha) = 1$ sinon. L'ensemble flou $S_{P_1} \cap S_{P_2}$ est l'ensemble flou $\forall\ \alpha \in\ ]0.2, 0.4]$, $\mu_{S_{P_1} \cap S_{P_2}}(\alpha) = 1$ et $\mu_{S_{P_1} \cap S_{P_2}}(\alpha) = 0$ sinon. Comme tous les α de $S_{P_1} \cup S_{P_2}$ sont complètement satisfaits, on en déduit que :

$$M_p^*(S_{P_1} \cap S_{P_2}) = M_p(S_{P_1} \cap S_{P_2})$$
$$= M_p(S_{P_1}) \wedge M_p(S_{P_2}).$$

Si $p = 2$, la mesure $M_p(S_{P_1})$ est égale à 0.4 et $M_p(S_{P_2})$ est égale à $(1 - 0.2^2)^{1/2}$, ce qui conduit à :

$$M_p^*(S_{P_1} \cap S_{P_2}) = M_p(S_{P_1}) \wedge M_p(S_{P_2})$$
$$= [(0.4^2 + ((1 - 0.2^2)^{1/2})^2 - 1]^{1/2} = 0.34.$$

Le degré 0.34 représente dans quelle mesure l'entreprise observée *a exactement 2 employés jeunes et bien payés*.

On note que contrairement au traitement de la composition de conditions comportant des nombres flous "usuels" représentant des données mal connues (modélisées par des distributions de possibilité), il n'est pas ici nécessaire de faire d'hypothèses particulières sur l'indépendance des critères. Ainsi, dans cet exemple, l'entier graduel $|E|$ est traité dans sa globalité et indépendamment dans P_1 et dans P_2. Par contre, si $|E|$ avait été une donnée mal connue, le choix d'une valeur possible de $|E|$ dans l'évaluation du prédicat P_1 aurait imposé le choix de la même valeur possible dans le traitement de P_2.

- **Égalité approchée :**

On s'intéresse maintenant aux *entreprises ayant environ 2 employés jeunes et bien payés*. Le prédicat "$|E|$ environ 2" se définit comme la conjonction $(|E| \leq_{gT} 2) \wedge (|E| \geq_{gT} 2)$ basés sur une relation d'ordre graduelle tolérante $x \geq_{gT} y$ qui est complètement satisfaite si $x_\alpha - y_\alpha \geq 0$ et, satisfaite au degré 0.5, si $x_\alpha - y_\alpha = -1$. Les satisfactions globales de chacun de ces prédicats sont graphiquement représentées par la figure 5.1.

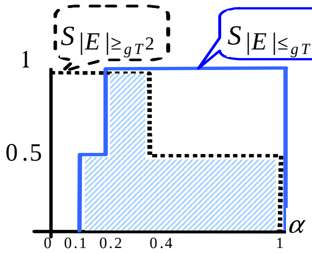

Figure 5.1 *Satisfaction globale de $(|E| \leq_{gT} 2)$ et de $(|E| \geq_{gT} 2)$*

On en déduit dans quelle mesure environ 2 employés sont jeunes et bien payés. Pour p = 2, on obtient :

$M^*_p(S_{|E| \geq_{gT} 2} \cap S_{|E| \leq_{gT} 2}) = 0.74.$

- **A propos de la cardinalité FECount :**

Montrons l'intérêt de notre démarche en analysant l'interprétation d'une cardinalité floue d'un ensemble flou E caractérisée par la fonction FECount(E) = FGCount(E) $\cap$ FLCount(E) [17].

Pour ce faire, examinons les cardinalités floues de l'ensemble P des personnes blondes défini par {1/John, 0.5/Mike, 0.5/Peter}. Nous obtenons :

FGCount(P) = {1/0, 1/1, 0.5/2, 0.5/3} ;

FLCount(P) = {0/0, 0.5/1, 0.5/2, 1/3, 1/4, …} ;

FECount(P) = {0.5/1, 0.5/2, 0.5/3}.

Le degré d'appartenance d'un entier n dans FECount(P) devrait décrire dans quelle mesure l'ensemble P contient *exactement n* personnes. Cependant, dans ce cas particulier, la difficulté provient du degré associé à 2 dans FECount(P) qui vaut 0.5, alors que, comme cela est souligné dans [2], aucune α-coupe de P ne comporte 2 éléments. En conséquence aucune interprétation plus ou moins relâchée du concept "blond" ne conduit à une cardinalité de 2 pour P.

En considérant $|P|$ = FGCount(P) comme un entier graduel, déterminons au moyen de notre méthode dans quelle mesure $|P| =_g 2$. La satisfaction globale de $|P| \geq_g 2$ est l'ensemble flou S_1 sur [0, 1] tel que : $\mu_{S_1}(\alpha) = 1$ si $\alpha \in$]0, 0.5], $\mu_{S_1}(\alpha) = 0$ sinon. La satisfaction globale de $|P| \leq_g 2$ est l'ensemble flou S_2 tel que : $\mu_{S_2}(\alpha) = 1$ si $\alpha \in$]0.5, 1], $\mu_{S_2}(\alpha) = 0$ sinon. Nous en déduisons que $S_1 \cap S_2 = \varnothing$ et donc que, quelle que soit la mesure M_p utilisée pour résumer cette satisfaction globale, $M_p(P) = 0$. Nous en concluons que la valeur de vérité de la proposition $|P| =_g 2$ est nulle.

Cette interprétation est correcte mais n'est pas cohérente avec la valeur de vérité 0.5 associée à l'élément 2 dans FECount(P). Analysons le principe de construction de cette fonction pour comprendre le problème posé.

Tout d'abord, constatons que les degrés 1, 1, 0.5 et 0.5 du FGCount(P) correspondent à ceux obtenus en évaluant respectivement $M_1(|P| \geq_g 0)$, $M_1(|P| \geq_g 1)$, $M_1(|P| \geq_g 2)$ et $M_1(|P| \geq_g 3)$. De même, les degrés 0, 0.5, 0.5, 1, 1 … du FLCount(P) sont ceux obtenus en évaluant $M_1(|P| \leq_g 0)$, $M_1(|P| \leq_g 1)$, $M_1(|P| \leq_g 2)$, $M_1(|P| \leq_g 3)$… Les fonctions FGCount et FLCount sont donc cohérentes avec la notion de relation d'ordre graduelle telle que nous l'avons définie. La difficulté posée par FECount vient donc de la composition de ces degrés.

En effet, dans FECount(P), le degré d'appartenance de 2 provient de la combinaison des degrés de 2 dans FGCount(P) et FECount(P), c'est-à-dire min(0.5, 0.5). Mais chacun de ces degrés 0.5 est en fait un *résumé* des satisfactions globales S_1 et S_2 reflétant des réalités bien différentes. L'intersection de S_1 et S_2 est vide, en conséquence la mesure $M_1(|P| =_g 2)$ est nulle, conformément à l'intuition. On voit ici que la composition de résumés est à considérer avec prudence.

6 Conclusion

Nous avons analysé de quelle manière des prédicats comportant des relations d'ordre sur des quantités graduelles peuvent être composés au moyen d'opérateurs conjonctifs ou disjonctifs. Les normes et conormes triangulaires de la logique multivaluée ont été généralisées afin de pouvoir les appliquer à des critères sur des quantités graduelles.

Ce travail sur la notion de relation d'ordre peut être complété en étudiant le comportement d'autres opérateurs d'agrégation, conjonctions et disjonctions pondérées ou moyennes.

Par ailleurs, les satisfactions globales et les opérateurs de conjonction et disjonction les combinant sont basés sur une sémantique commune relative à l'importance attribuée aux α-coupes (même paramétrage p). Le problème de combinaison de mesures basées sur des interprétations différentes de l'importance des α-coupes (*i.e.* paramétrages p différents) se pose. C'est un problème difficile mais l'approche proposée, en exhibant la (ou les) fonction(s) d'importance sous-jacente(s), semble offrir une ouverture pouvant conduire à des solutions.

Références

[1] Bosc P., Pivert O., SQLF : a relational database language for fuzzy querying , *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, vol. 3, p. 1-17, 1995.

[2] Delgado M., Sanchez D., Martin-Bautista M. J., Amparo Vila M., .A probalistic definition of a nonconvex fuzzy cardinality, *Fuzzy Sets and Systems*, 126, p. 177-190, 2002.

[3] Dubois D., Prade H., Fuzzy cardinality and modeling of imprecise quantification , *Fuzzy Sets and Systems* , vol. 16, n°3, p. 199-230, 1985.

[4] Dubois D., Prade H., Fuzzy numbers: an overview, *Analysis of fuzzy information, Mathematics and Logics*, vol.I, p. 3-39, 1987.

[5] Klement E. P., Mesiar R., Pap E., Triangular norms. Position paper II: general constructions and parameterized families, *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 145, p. 411-438, 2004.

[6] Liétard L., Rocacher D., A generalization of the OWA operator to evaluate non monotonic quantifiers, *4th Conference of the European Society for Fuzzy Logic and Technology and 11th Rencontres Francophones sur la Logique Floue et ses Applications*, 2005, p. 183-188.

[7] Miyamoto S., Fuzzy Multisets and Fuzzy Clustering of Documents, *10th Inter. Conf. On Fuzzy Systems* FUZZ IEEE'01, 2001.

[8] Rocacher D., On fuzzy bags and their application to flexible querying, *Fuzzy Sets and Systems* 140 (1), p. 93-110, 2003.

[9] Rocacher D., Bosc P., About $\mathbb{Z}_f$, the set of fuzzy relative integers, and the definition of fuzzy bags on $\mathbb{Z}_f$, *Lecture Notes in Computer Science* LNCS 2715, Springer-Verlag, 2003, p. 95-102.

[10] Rocacher D., Connan F., 1999. Flexible queries in object databases: on the study of bags, *8th Inter.l Conf. on Fuzzy Systems*, p. 615-620.

[11] Rocacher D., Liétard L., Relations d'ordre floues sur des quantité floues et expressions de requêtes flexibles , *Rencontres francophones sur la logique floues et ses applications LFA'04*, Nantes, 2004, p. 253-260.

[12] Rocacher D., Bosc P., The set of fuzzy relative integers and fuzzy bags, *International Journal of Intelligent System IJIS*, à paraître.

[13] Rocacher D., Bosc P., The set of fuzzy rational numbers and flexible querying , *Fuzzy Sets and Systems*, 155, p. 317-339, 2005.

[14] Schweizer B., Sklar A., Associative functions and abstract semi-groups, *Publicationes Mathematicae Debrecen*, 10, p. 69-81, 1963.

[15] Whalen T., Parameterized R-implications, *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 134, p. 231-281, 2003.

[16] Wygralak M., Questions of cardinality of finite fuzzy sets , *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 102, p. 185-210, 1999.

[17] Zadeh L. A., A computational approach to fuzzy quantifiers in natural languages, *Comp. Math. App.*, vol. 9, 1983, p. 149-184.